COLEGIO NICOLAS ESGUERRA IED.

SEGUNDA CARTILLA "APRENDER EN CASA LLEGO A TU HOGAR"

TRIGONOMETRIA GRADO DECIMO.

DOCENTES:

YAMILLE RAMIREZ JIMENEZ yamilleramirezjimenez@colegionicolasesguerra.edu.co

LUIS PARRA luisparravargas@colegionicolasesguerra.edu.co

RAFAEL MORA tareaspararafaelmoracne@gmail.com

COMPETENCIA: Determinar los elementos, las ecuaciones canónicas, las ecuaciones generales y las gráficas de la recta, la circunferencia, la parábola, la elipse y la hipérbola.

INSTRUCCIONES GENERALES

La segunda cartilla se organiza en cuatro partes, las primeras 3 contienen la teoría y ejemplos de las temáticas tratadas en este segundo semestre, se debe hacer lectura cuidadosa, estudiando y analizando los procesos empleados en cada ejemplo, serán la guía para solucionar los ejercicios. En la última parte encontraran la lista de ejercicios para entregar, nuevamente se resalta la secuencia: Se deben leer las primeras 3 partes y después solucionar los ejercicios.

Parte 1. Distancia entre puntos, punto medio y recta,

Parte 2. Secciones cónicas.

Parte 3. Gráficas estadísticas

Parte 4. Ejercicios para resolver y entregar

PARTE 1. RECTA

1. DISTANCIA ENTRE PUNTOS, PUNTO MEDIO Y RECTA.

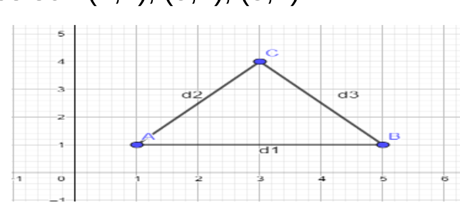
1.1. DISTANCIA ENTRE DOS PUNTOS.

La distancia entre 2 puntos (a, b) y (c, d) del plano cartesiano se calcula con la siguiente formula:

$$d = \sqrt{(a-c)^2 + (b-d)^2}$$

EJEMPLO: Determine qué clase de triángulo es aquel cuyos vértices son (1,1), (5,1), (3,4)

SOLUCION:



$d_1 = distancia\ entre\ (1{,}1),(5{,}1) = \sqrt{(1-5)^2 + (1-1)^2} = 4$

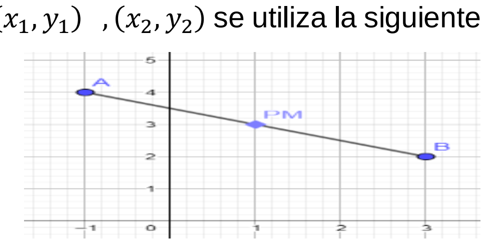
$d_2 = distancia\ entre$ (1,1), (3,4) $=\sqrt{(1-3)^2 + (1-4)^2} = \sqrt{13}$

$d_3 = distancia\ entre\ (5{,}1),(3{,}4)$ $\sqrt{(3-5)^2 + (4-1)^2} = \sqrt{13}$

El triángulo es ISOCELES por que tiene dos lados de igual longitud.

1.2. PUNTO MEDIO DE UN SEGMENTO.

Para calcular el punto medio de un segmento cuyos extremos son (x_1, y_1) , (x_2, y_2) se utiliza la siguiente formula: $PM = \left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}\right)$



EJEMPLO: Calcular el punto medio entre (-1,4) y (3,2)

$$PM\left(\frac{-1+3}{2}, \frac{4+2}{2}\right) = (1{,}3)$$

2. ECUACIÓN GENERAL DE LA RECTA.

La forma general de la ecuación de una recta es $y = mx + b$ en donde m es la pendiente de la recta, b es la segunda componente del punto de corte de la recta con el eje y, es de la forma $(0, b)$. En general el exponente de la variable independiente x es uno.

Ejemplo:

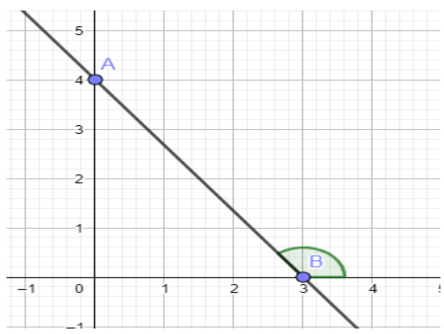
a) $y = -2x + 3$ es una recta donde $m = -2$ y $b = 3$.
b) $y = -8$ es una recta donde $m = 0$ y $b = 8$.
c) $y = x$ es una recta donde $m = 1$ y $b = 0$.

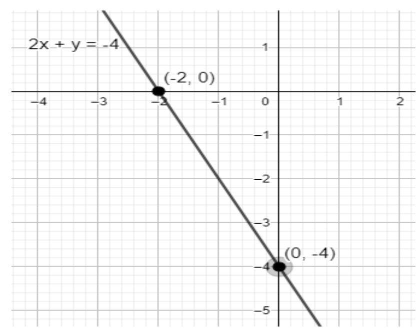
La posición de la recta en el plano cartesiano está relacionada con el valor de la pendiente que es una constante que se simboliza con m y aparece en la ecuación general, su valor se puede calcular con la siguiente expresión si se conocen dos puntos (x_1, y_1) , (x_2, y_2) que pertenezcan a la recta,

$$\boldsymbol{m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}}$$

Por otro lado, existe la posibilidad de encontrar la pendiente de una recta si se conoce el ángulo θ de inclinación que tiene la recta con respecto al eje x y para ello se utiliza la siguiente formula,

$$m = tan\theta$$



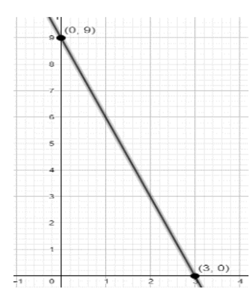


Para construir la gráfica de una recta siempre es necesario identificar dos puntos que pertenezcan a la recta y con frecuencia se usan la intersección con el eje x y la intersección con el eje y, los cuales se establecen de la siguiente manera:

a) Para encontrar el intercepto con y se debe sustituir a x por cero y calcular el valor de y.

b) Para encontrar el intercepto con x se debe sustituir a y por cero, para después calcular el valor de x.

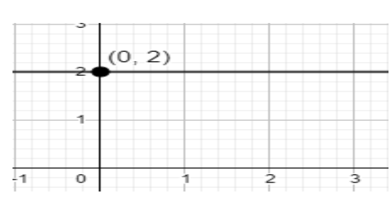
Ejemplo: Encuentre los interceptos y trace la gráfica de las siguientes rectas;



a) $3x + y = 9$ de tal forma que si despejamos $y = 9 - 3x = -3x + 9$.
Si x se sustituye por cero se tiene $y = (-3)0 + 9 = 0 + 9 = 9$, luego el orte con el eje Y es $(0,9)$.
Si y se sustituye por cero se tiene $0 = -3x + 9$, despejando a x se obtiene $x = 3$, luego el corte con el eje x es $(3,0)$.

b) $2y + 4x + 8 = 0$ de tal forma que $2y = -4x - 8$,
luego $y = -2x - 4$.
Si x se sustituye por cero se tiene $y = (-2)0 - 4 = -4$, luego el corte con el eje Y es $(0, -4)$.

Si y se sustituye por cero se tiene $0 = -4x - 8$, despejando a x se obtiene $x = -2$, luego el corte con el eje X es $(-2,0)$.



c) $5y - 10 = 0$ de tal forma que $5y = 10$, luego $y = 2$ que equivale a $y = 2\,x^0$.
Si x se reemplaza por cero se tiene que $y = 2$, luego el corte con el eje Y es $(0, 2)$.
Si y se reemplaza por cero se tiene que $0 = 2$ lo cual es una inconsistencia y se puede concluir que no existe corte con el eje X.

NOTA: De los ejemplos anteriores se puede concluir que la constante b (término independiente) representa la segunda coordenada de intercepto con el eje y que como ya se mencionó en general es de la forma $(0, b)$.

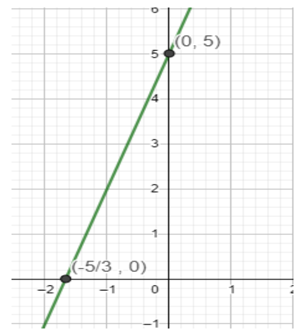
La expresión que permite determinar la ecuación de una recta es,

$$y - y_1 = m\,(x - x_1)$$

en donde m es el valor de la recta y (x_1, y_1) es un punto que pertenezca a la recta.

Ejemplo: Determine la ecuación de la recta que pasa por los puntos que se indican y construya la gráfica estableciendo si se trata de una recta creciente, decreciente o constante, señale los puntos de intersección con los ejes.

$a)(0{,}5)$ y $(2, 11)$



Solución: $m = \frac{11-5}{2-0} = 3$

$Y - 5 = 3(x - 0)$
$Y - 5 = 3x$
$Y = 3x + 5$ (Ecuación de la recta)

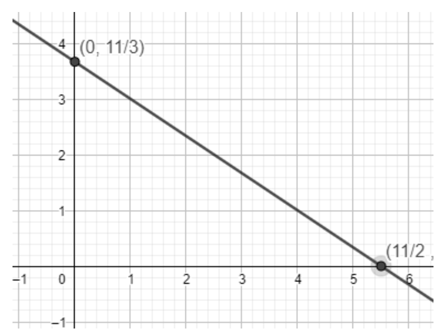
Los interceptos con los ejes son $(0{,}5)$ y $\left(\frac{-5}{3}, 0\right)$ este último se obtiene si $y = 0$.

Para trazar la gráfica se ubican los puntos de corte con los ejes y se traza la recta.

Observando la gráfica es posible determinar que al aumentar el valor de la variable x se produce un aumento en el valor de la variable y, de ahí que la recta sea creciente. Esto siempre ocurre cuando la pendiente tiene un valor positivo.

b) $(-2{,}5)$ y $(1, 3)$

Solución: $m = \frac{3-5}{1-(-2)} = \frac{-2}{3}$



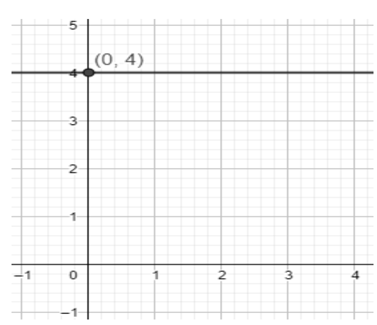
$Y - 5 = \frac{-2}{3}\,(x - (-2))$
$Y - 5 = \frac{-2}{3}(x + 2)$
$Y - 5 = \frac{-2}{3}x - \frac{4}{3}$
$Y = \frac{-2}{3}x - \frac{4}{3} + 5$
$Y = \frac{-2}{3}x + \frac{11}{3}$ (Ecuación de la recta)

Los interceptos con los ejes son $(0, \frac{11}{3})$ y $\left(\frac{11}{2}, 0\right)$

Observando la gráfica es posible determinar que al aumentar el valor de la variable x se produce una disminución en el valor de la variable y, de ahí que la recta sea decreciente. Esto siempre ocurre cuando la pendiente tiene un valor negativo.

a) $(-1{,}4)$ y $(2, 4)$

Solución: $m = \frac{4-4}{2-(-1)} = 0$ luego en este caso la variable x desaparece y la ecuación es de la forma $y = a$ en donde a es el valor que siempre toma y.



$y - 4 = 0\,(x - (-1))$
$y - 4 = 0$
$y = 4$ (Ecuación de la recta)

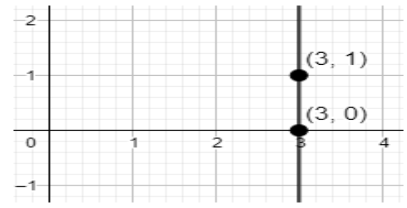
El intercepto con el eje y es $(0{,}4)$ y no existe intercepto con el eje x.

Observando la gráfica es posible determinar que al aumenta el valor de la variable x no se produce cambios en el valor de la variable y, de ahí que la recta sea paralela al eje x. Esto siempre ocurre cuando la pendiente tiene como valor cero.

b) $(3{,}1)$ y $(3, 0)$

Solución: $m = \frac{0-1}{3-3} = \frac{-1}{0}$, luego tiene un valor indeterminado, en este caso la variable y desaparece y la ecuación es de la forma $x = a$ en donde a es el valor que siempre toma x.

La ecuación en este caso es de la forma $x = 3$, el intercepto con el eje x es (3,0) y no tiene intercepto con el eje y.



Observando la gráfica es posible determinar que un aumento ó disminución del valor de la variable y no produce cambios en el valor de la variable x, de ahí que la recta sea paralela al eje y. Esto siempre ocurre cuando la pendiente no tiene valor determinado.

EJEMPLO: Identifique la pendiente y puntos de corte con los ejes de la recta $-x - 2y = 6$

SOLUCION:

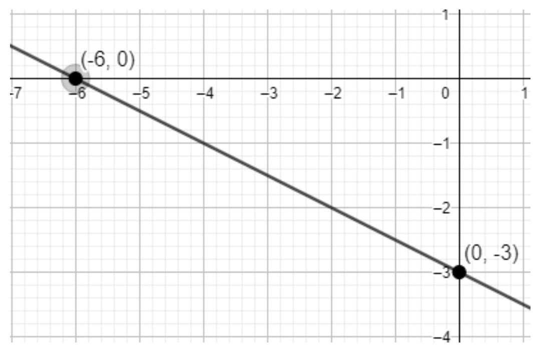
Antes de identificar la pendiente y los puntos de corte con los ejes es importante despejar la variable y.

$-x - 6 = 2y$ de donde $\frac{-1}{2}x - \frac{6}{2} = y$ luego $\frac{-1}{2}x - 3 = y$

El valor de la pendiente es $\frac{-1}{2}$ y por ser negativo la recta es decreciente.

Para encontrar el corte con el eje x debe en la ecuación reemplazar a y por cero, de la siguiente manera:

$$\frac{-1}{2}x - 3 = y$$
$$\frac{-1}{2}x - 3 = 0$$
$$\frac{-1}{2}x = 3$$
$$x = 3 \div \frac{-1}{2}$$
$$x = -6$$



Luego el punto de corte con x es $(-6{,}0)$.Para encontrar el corte con el eje y debe en la ecuación reemplazar a x por cero, de la siguiente manera:

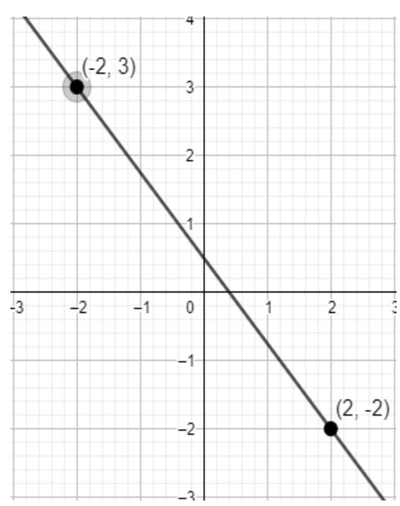
$\frac{-1}{2}x - 3 = y$ *entonces* $\frac{-1}{2}(0) - 3 = y$ *luego* $-3 = y$ .El punto de corte con x es $(0, -3)$

EJEMPLO: Halle la ecuación de la recta que pasa por los puntos $(-2{,}3)$y $(2, -2)$.

SOLUCION: Antes de calcular la ecuación de la recta es importante determinar el valor de la pendiente, si

$(x_1, y_1) = (-2{,}3)$; $(x_2, y_2) = (2, -2)$

Se tiene que $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{-2-3}{2-(-2)} = \frac{-5}{4}$



Para calcular la ecuación de una recta se utiliza la expresión $y - y_1 = m(x - x_1)$ en donde m es la pendiente, (x_1, y_1) es un punto de la recta.

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$
$$y - 3 = \frac{-5}{4}(x - (-2))$$
$$y - 3 = \frac{-5}{4}(x + 2)$$
$$y - 3 = \frac{-5x}{4} - \frac{10}{4}$$
$$y = \frac{-5x}{4} + \frac{1}{2}$$

3. RECTAS PARALELAS Y RECTAS PERPENDICULARES.

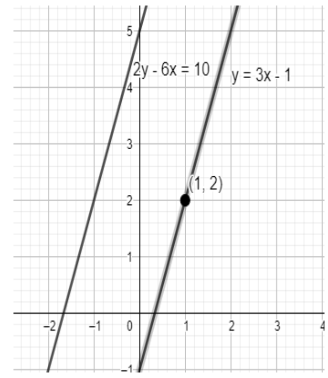
3.1. Paralelas

Se dice que: si dos rectas son **paralelas** tienen el mismo valor para la pendiente.

EJEMPLO: Determinar la ecuación de una recta paralela a $2y - 6x = 10$ que pase por el punto $(1{,}2)$.Despejando a y en la ecuación $2y - 6x = 10$ se obtiene, $2y = 6x + 10$ de donde $y = 3x + 5$

Teniendo en cuenta que la forma general de la ecuación de una recta es $y = mx + b$ en donde m es el valor de la pendiente se puede concluir que la pendiente tiene como valor 3.

Como la ecuación que se desea calcular es la de una recta paralela a $2y - 6x = 10$ se tiene en cuenta el mismo valor para la pendiente y se utiliza la expresión,



$$y - y_1 = m(x - x_1)$$
$$y - 2 = 3(x - 1)$$
$$y - 2 = 3x - 3$$
$$y = 3x - 1$$

De lo anterior se concluye que la recta $y = 3x + 5$ y $y = 3x - 1$ son paralelas. Observe que tienen la misma pendiente $m = 3$

3.2. Perpendiculares

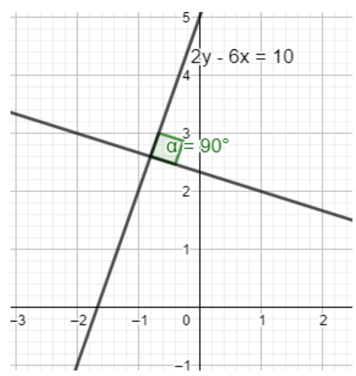
Se dice que si dos rectas son **perpendiculares** tienen pendientes inversas y opuestas a la vez, de tal forma que si las pendientes de las rectas son m_1 y m_2 se tiene que,

$$m_1 = \frac{-1}{m_2}$$

EJEMPLO: Determinar la ecuación de una recta perpendicular a $2y - 6x = 10$ que pase por el punto $(1,2)$ Despejando a y en la ecuación $2y - 6x = 10$ se obtiene, $2y = 6x + 10$ luego $y = 3x + 5$ en donde $m = 3$.

Teniendo en cuenta que la forma general de la ecuación de una recta es $y = mx + b$ en donde m es el valor de la pendiente se puede concluir que la pendiente tiene como valor 3.

Como la ecuación que se desea calcular es la de una recta perpendicular a $2y - 6x = 10$ se tiene en cuenta como pendiente de la nueva recta es el valor $\frac{-1}{3}$ y se utiliza la expresión,



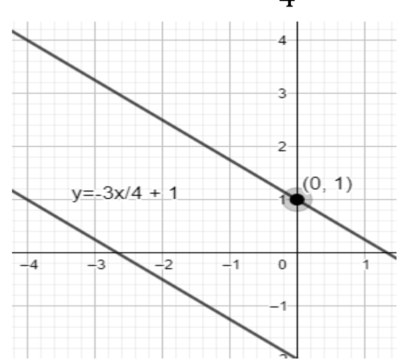
$$y - y_1 = m(x - x_1)$$
$$y - 2 = \frac{-1}{3}(x - 1)$$
$$y - 2 = \frac{-1}{3}x + \frac{1}{3}$$
$$y = \frac{-1}{3}x + \frac{1}{3} + 2$$
$$y = \frac{-1}{3}x + \frac{7}{3}$$

De lo anterior se concluye que la recta $y = 3x + 5$ y $y = \frac{-1}{3}x + \frac{7}{3}$ son perpendiculares.

EJEMPLO: Halle la ecuación de la recta que pasa por el punto $(0,1)$ y es paralela a y= $-\frac{3x}{4} - 2$

SOLUCION: Antes de calcular la ecuación de la recta es importante determinar el valor de la pendiente teniendo en cuenta que si es paralela a $y = -\frac{3x}{4} - 2$ Entonces tiene la misma pendiente m = $\frac{-3}{4}$

Para calcular la ecuación de una recta se utiliza la expresión $y - y_1 = m(x - x_1)$ en donde m es la pendiente , $(x_1, y_1) = (0,1)$ es un punto de la recta.

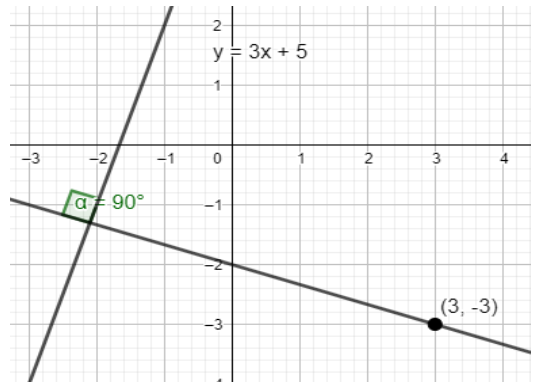


$$y - y_1 = m(x - x_1)$$
$$y - 1 = \frac{-3}{4}(x - 0)$$
$$y - 1 = \frac{-3}{4}x$$
$$y = \frac{-3x}{4} + 1$$

EJEMPLO: Halle la ecuación de la recta que pasa por el punto $(3, -3)$ y es perpendicular a $y = 3x + 5$

SOLUCION: Antes de calcular la ecuación de la recta es importante determinar el valor de la pendiente teniendo en cuenta que si es perpendicular a $y = 3x + 5$ entonces tienen pendientes inversas y opuestas es decir que la pendiente de la recta cuya ecuación se está calculando es

$$m = \frac{-1}{3}$$



Para calcular la ecuación de una recta se utiliza la expresión $y - y_1 = m(x - x_1)$ en donde m es la pendiente , $(x_1, y_1) =$ $(3, -3)$ es un punto de la recta.

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

$$y - (-3) = \frac{-1}{3}(x - 3)$$

$y + 3 = \frac{-1}{3}x + 1$ de donde $y = \frac{-1}{3}x + 1 - 3$ luego

$$y = \frac{-1}{3}x - 2$$

PARTE 2. SECCIONES CÓNICAS

Las cónicas o también llamadas secciones cónicas se presentan cuando un doble cono se interseca con planos.

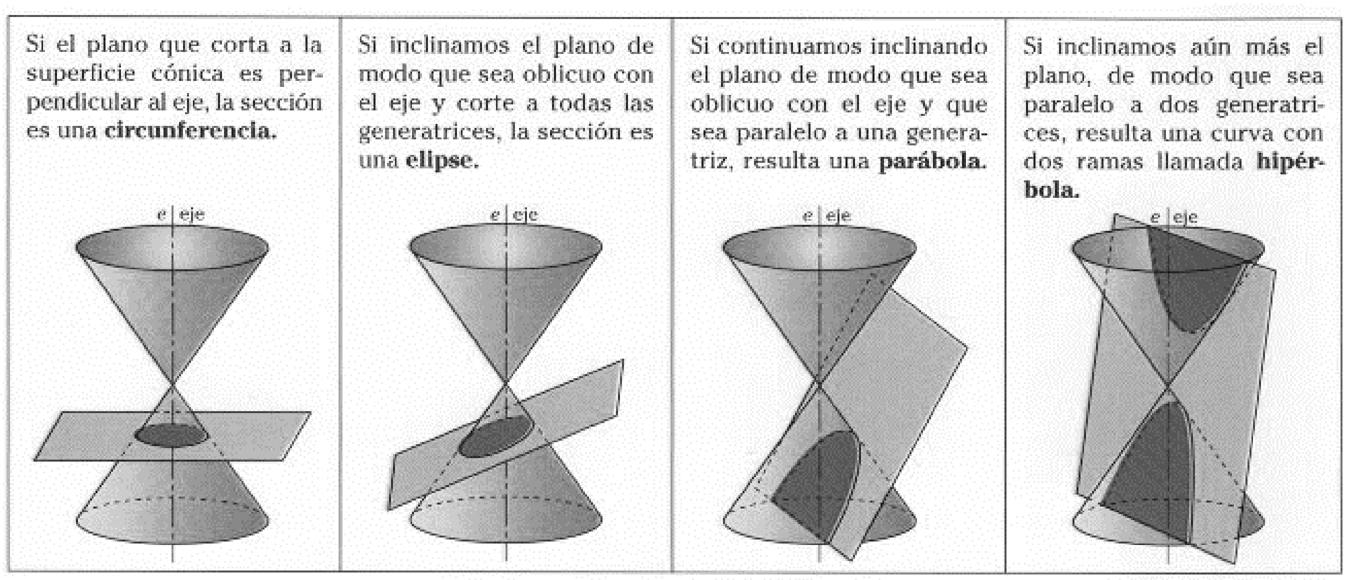


Imagen Tomada de:
http://recursostic.educacion.es/descartes/web/materiales_didacticos/Las_conicas_como_lugares_geometricos/Las_conicas_como_lugares_geometricos.htm

Se obtendrán las ecuaciones de definiciones directamente en el plano cartesiano. Descubriremos que la ecuación de una cónica, tiene la forma: $Ax^2 + By^2 + Cx + Dy + Exy + F = 0$ Con $A \neq 0$ ó $B \neq 0$ ó ambos, y $E = 0$.

4. CIRCUNFERENCIA

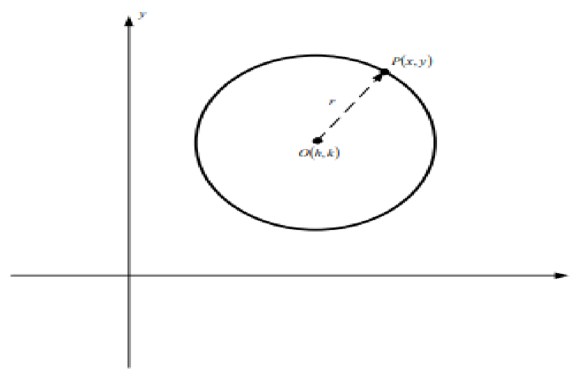
Sea O un punto del plano y sea "r" un número real positivo. Se define la circunferencia como el conjunto de puntos $P(x, y)$ tal que la distancia de P a O es igual a "r". Es decir:

$$Circunferencia = \{ P(x, y) \mid d(P, O)\} = r\}$$

Al punto "O" se le denomina centro de la circunferencia y a "r" se le denomina radio de la circunferencia.

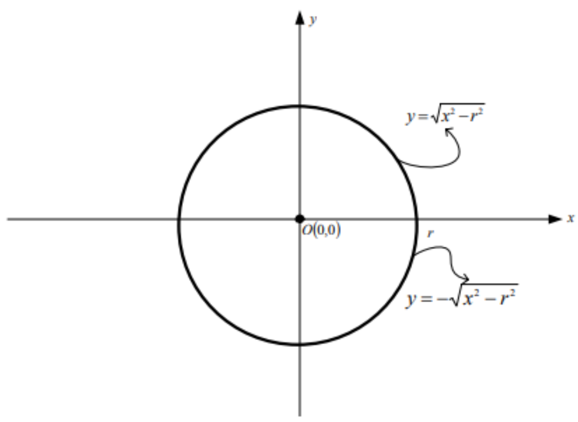
4.1. Ecuación canónica de la circunferencia

Supongamos que O tiene coordenadas (h, k)



La distancia entre los puntos $P(x, y)$ de la circunferencia y el punto $C(h, k)$, la cual denotamos como "r", está dada por $r = \sqrt{(x - h)^2 + (y - k)^2}$, entonces, tenemos:

$r^2 = (x - h)^2 + (y - k)^2$, es la Ecuación canónica de una circunferencia



Un tipo especial de circunferencia es aquella que tiene por ecuación: $x^2 + y^2 = r^2$. Es decir, una circunferencia con centro $O(0,0)$, el origen:

Despejando y , obtenemos las ecuaciones de las semicircunferencias superior e inferior.

Ejemplo

Hallar la ecuación canónica de la circunferencia que tiene centro el punto $O(4,2)$ **y radio** 3

SOLUCIÓN:

Reemplazando en $(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$ tenemos:

$$(x-4)^2 + (y-2)^2 = 3^2$$
$$(x-4)^2 + (y-2)^2 = 9$$

La ecuación canónica pedida.

Ahora, en la ecuación canónica del ejemplo anterior $(x - 4)^2 + (y - 2)^2 = 9$, al elevar al cuadrado y reducir términos semejantes se obtiene:

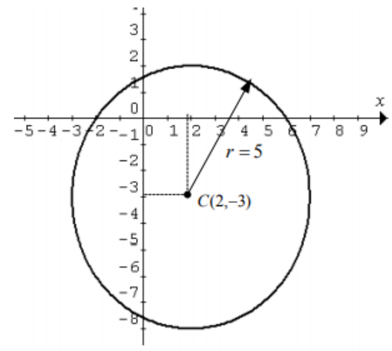
$$x^2 - 8x + 16 + y^2 - 4y + 4 = 9$$
$$x^2 - 8x + y^2 - 4y + 16 + 4 - 9 = 0$$
$$x^2 - 8x + y^2 - 4y + 11 = 0$$

Esta última ecuación es llamada ECUACIÓN GENERAL DE UNA CIRCUNFERENCIA.

Por tanto si nuestra intensión fuese dibujar la circunferencia o descubrirle sus elementos (centro y radio) a partir de la ecuación general, deberíamos llevar la ecuación a su forma canónica completando trinomios cuadrados perfectos.

Ejemplo

Graficar la circunferencia que tiene por ecuación $x^2+y^2-4x+6y-12=0$



Solución

La ecuación general dada, la transformamos a la ecuación canónica completando cuadrados

$$\left(x^2-4x+4\right)+\left(y^2+6y+9\right)=12+4+9$$
$$(x-2)^2+(y+3)^2=25$$

Tenemos una circunferencia de radio $r=5$ y centro $C(2,-3)$

En el anterior ejemplo, se completa cuadrados, es decir:

$x^2+y^2-4x+6y-12=0$ Inicialmente se asocian variables

$(x^2-4x)+(y^2+6y)=12$

en cada paréntesis se suma un tercer término que sale de:

En el primer paréntesis al número 4 de 4x, se divide por 2 y se eleva al cuadrado, 4/2= 2, al cuadrado daría 4.

En el segundo paréntesis al número 6 de 6y, se divide por 2 y se eleva al cuadrado, 6/2=3, al cuadrado daría 9

El 4 y el 9 se suman en ambos lados de la ecuación

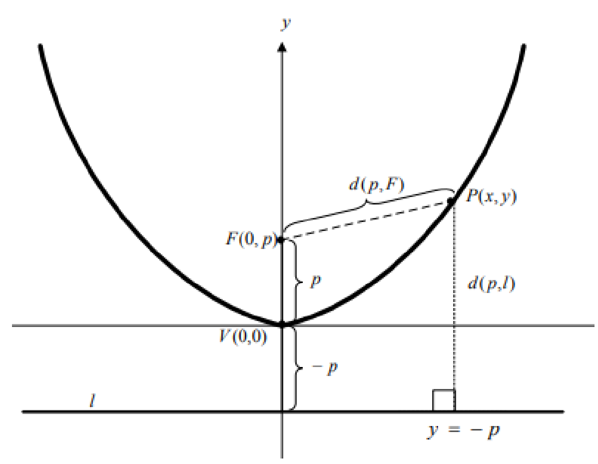
$(x^2-4x+4)+(y^2+6y+9)=12+4+9$, de allí se completa cuadrado.

5. PARÁBOLA

Sea l una recta y sea F un punto. La parábola se define como el conjunto de puntos $P(x,y)$ tal que su distancia al punto F es igual a su distancia a la recta l. Es decir: $Parábola=\{P(x,y)\mid d(P,F)=d(p,l)\}$. Al punto F se le denomina foco de la parábola y a la recta l se le denomina directriz de la parábola.

Ecuación canónica

Supongamos que F tiene coordenadas $(0,p)$ y la recta l tiene ecuación $y=-p$ con $p>0$. Observe la gráfica:



Observe que $d(P,F)=\sqrt{(x-0)^2+(y-p)^2}$ y que $d(P,l)=|y+p|$

Igualando distancias y resolviendo

$$d(P,F)=d(P,l)$$

$\sqrt{(x-0)^2+(y-p)^2}=y+p$

$$\left(\sqrt{(x-0)^2+(y-p)^2}\right)^2=(y+p)^2$$

$$(x-0)^2+(y-p)^2=(y+p)^2$$

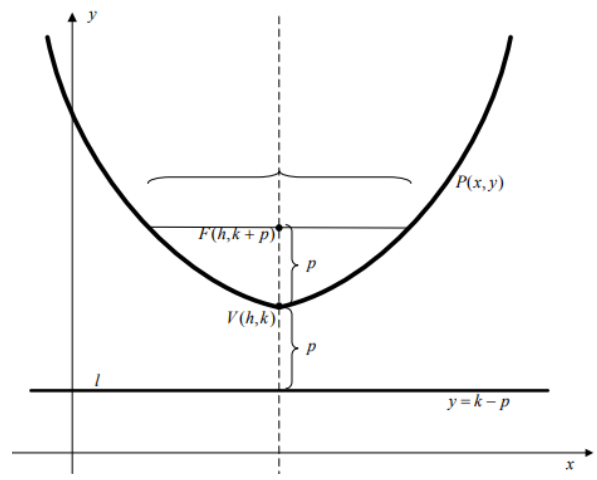
$$(x^2)+(y^2-2py+p^2)=(y^2+2py+p^2)$$

$$x^2=4py$$

Al punto V se le denomina vértice de la parábola, en este caso tiene coordenadas $(0,0)$. A la recta perpendicular a la directriz, que contiene al vértice y al foco, se le denomina Eje Focal. Observe que para la parábola anterior el eje focal es el eje y .

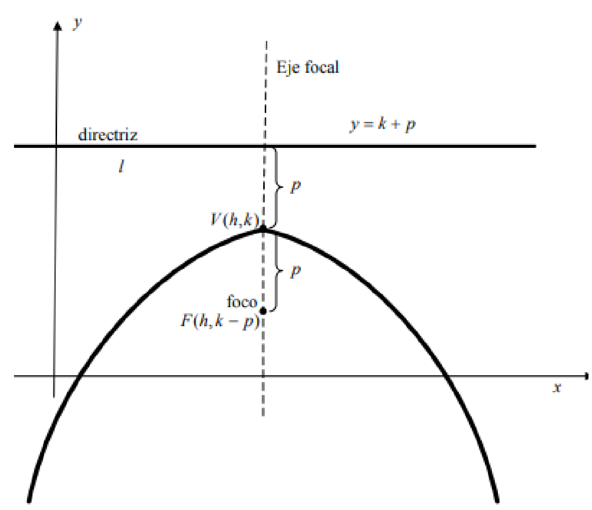
Observe además que la parábola es cóncava hacia arriba. Al segmento de recta perpendicular al eje focal que pasa por el foco y que tiene como extremos los dos puntos de la parábola, se denomina lado recto y tiene una medida de $4p$. Suponga ahora que el vértice no es el origen, que tenemos $V\,(h,k)$, entonces su ecuación sería:

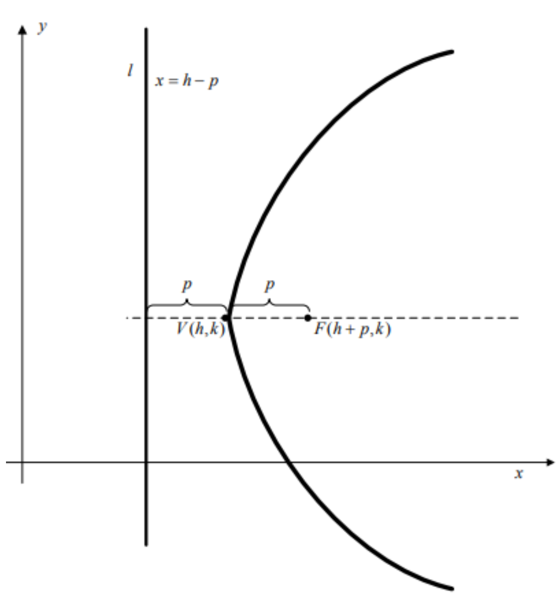
$(x-h)^2=4p(y-k)$ Y su gráfico sería



Para otros casos, tenemos: $(x-h)^2=-4p(y-k)$

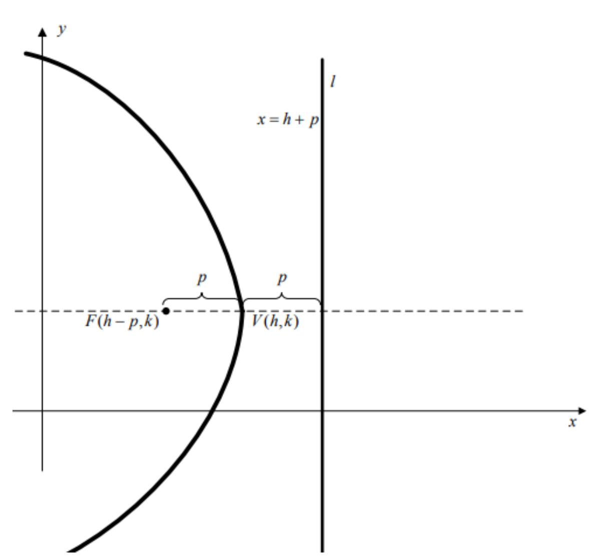
Una parábola con eje focal vertical, pero cóncava hacia abajo.





Si la parábola tiene ecuación $(y-k)^2=4p(x-h)$, su eje focal será horizontal y además será cóncava hacia la derecha:

Si la parábola tiene ecuación $(y-k)^2=-4p(x-h)$. Su eje focal será horizontal, pero ahora será cóncava hacia la izquierda:



La ecuación general de esta cónica será de la forma $Ax^2 + By^2 + Cx + Dy + F = 0$ con $A = 0$ o $B = 0$ pero no ambos.

Es decir tendremos ecuaciones de la forma $Ax^2 + Cx + Dy + F = 0$ o de la forma $By^2 + Cx + Dy + F = 0$, según sea la dirección del eje focal.

Ejemplo 1

Graficar la parábola que tiene por ecuación $4x^2 - 20x - 24y + 97 = 0$. Indique coordenadas del vértice, coordenadas del foco, ecuación de la recta directriz.

SOLUCIÓN:

Despejando la variable cuadrática para completarle cuadrados y agrupando, tenemos:

$$4x^2 - 20x = -24y - 97$$

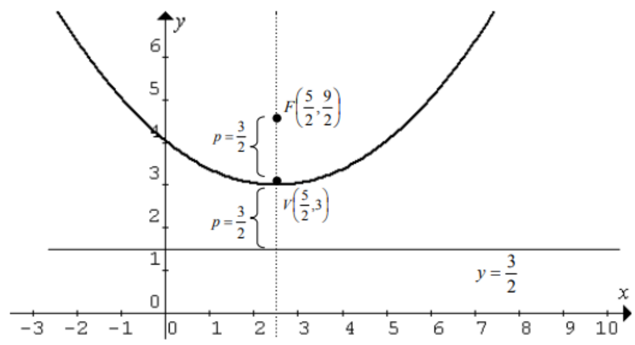
$$\frac{4}{4}\left(x^2 - 5x + \frac{25}{4}\right) = \frac{24}{4}y - \frac{97}{4} + \frac{25}{4}$$

$$\left(x - \frac{5}{2}\right)^2 = 6y - 18$$

$$\left(x - \frac{5}{2}\right)^2 = 6(y - 3)$$

1. La parábola tiene vértice $V\left(\frac{5}{3}, 3\right)$.
2. El eje focal es paralelo al eje y
3. La parábola es cóncava hacia arriba
4. $p = \frac{3}{2}$ debido a que $6 = 4p$.

Realizando su gráfica tenemos:

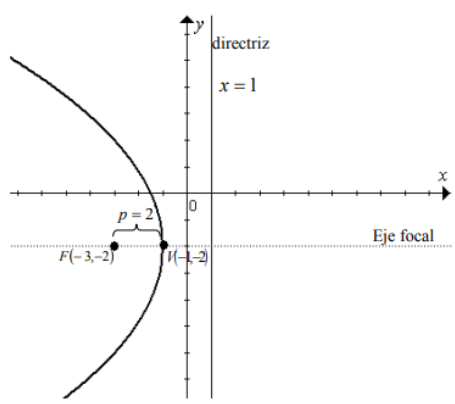


Ejemplo 2

Hallar la ecuación general de la parábola que tiene foco el punto de coordenadas $(-3,-2)$ y directriz la recta con ecuación $x = 1$.

SOLUCIÓN

En primer lugar representamos el foco y la directriz en el plano cartesiano.



Concluimos que:

1. El vértice debe tener coordenadas $(-1,-2)$
2. El eje focal es paralelo al eje x
3. La parábola es cóncava hacia la izquierda.
4. $p = 2$, distancia del vértice al foco o distancia del vértice a la directriz.
5. La ecuación de trabajo es $(y-k)^2 = -4p(x-h)$

Bien, reemplazando los valores en la ecuación de trabajo, tenemos:

$$(y+2)^2 = -4(2)(x+1)$$

$$y^2 + 4y + 4 = -8x - 8$$

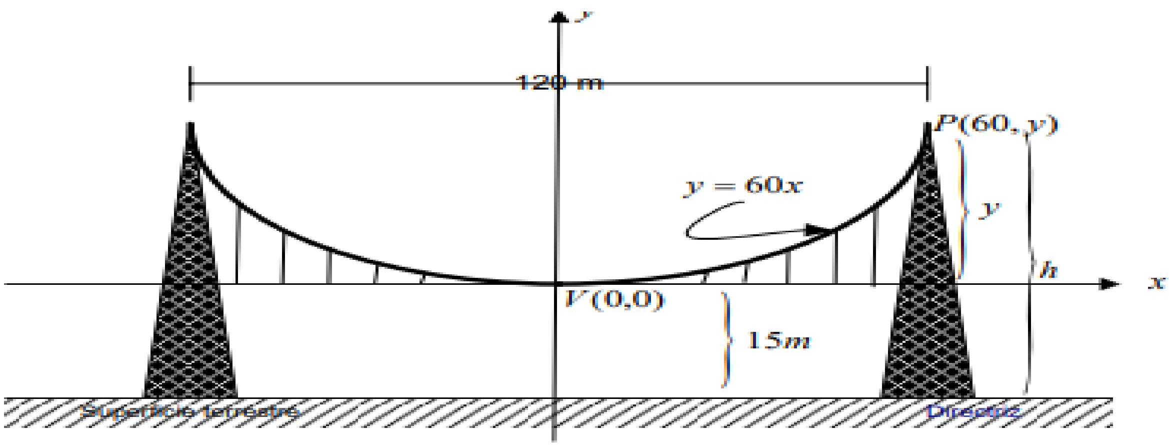
$$8x + y^2 + 4y + 12 = 0$$

Ejemplo 3

Un puente colgante de $120m$ de longitud tiene trayectoria parabólica sostenida por torres de igual altura si la directriz se encuentra en la superficie terrestre y el punto más bajo de cada cable está a $15m$ de altura de dicha superficie, hallar la altura de las torres.

SOLUCIÓN:

Primero hacemos una representación gráfica de la información proporcionada, trabajando en el plano cartesiano, es mejor poner el vértice en el origen:



La ecuación de la trayectoria sería: $\boxed{\begin{aligned} x^2 &= 4(15)y \\ x^2 &= 60y \end{aligned}}$

Utilizando la ecuación de la trayectoria determinamos "y": $\boxed{\begin{aligned} x^2 &= 60y \\ 60^2 &= 60y \\ y &= 60 \end{aligned}}$

Por lo tanto la altura de las torres sería: $\boxed{\begin{aligned} h &= y + p \\ h &= 60 + 15 \\ h &= 75m \end{aligned}}$

Ejemplo 4

Hallar la ecuación de la parábola que tiene eje focal vertical y contiene los puntos $(-1,5)$, $(3,1)$ y $(7,5)$.

SOLUCIÓN:

Ya que tiene eje focal vertical empleamos la ecuación $x^2 + C'x + D'y + F' = 0$ ¿Porqué?).

Cómo los puntos pertenecen a la parábola, las coordenadas deben satisfacer su ecuación.

Reemplazando y simplificando:

$$\begin{cases} (-1)^2 + C'(-1) + D'(5) + F' = 0 \\ (3)^2 + C'(3) + D'(1) + F' = 0 \\ (7)^2 + C'(7) + D'(5) + F' = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -C' + 5D' + F' = -1 \\ 3C' + D' + F' = -9 \\ 7C' + 5D' + F' = -49 \end{cases}$$

Resolviendo el sistema simultáneo se obtiene:

$$\boxed{C' = -6}, \quad \boxed{D' = -4} \text{ y } \boxed{F' = 13}$$

Por tanto la ecuación buscada sería:

$$x^2 + -6x - 4y + 13 = 0$$

6. ELIPSE

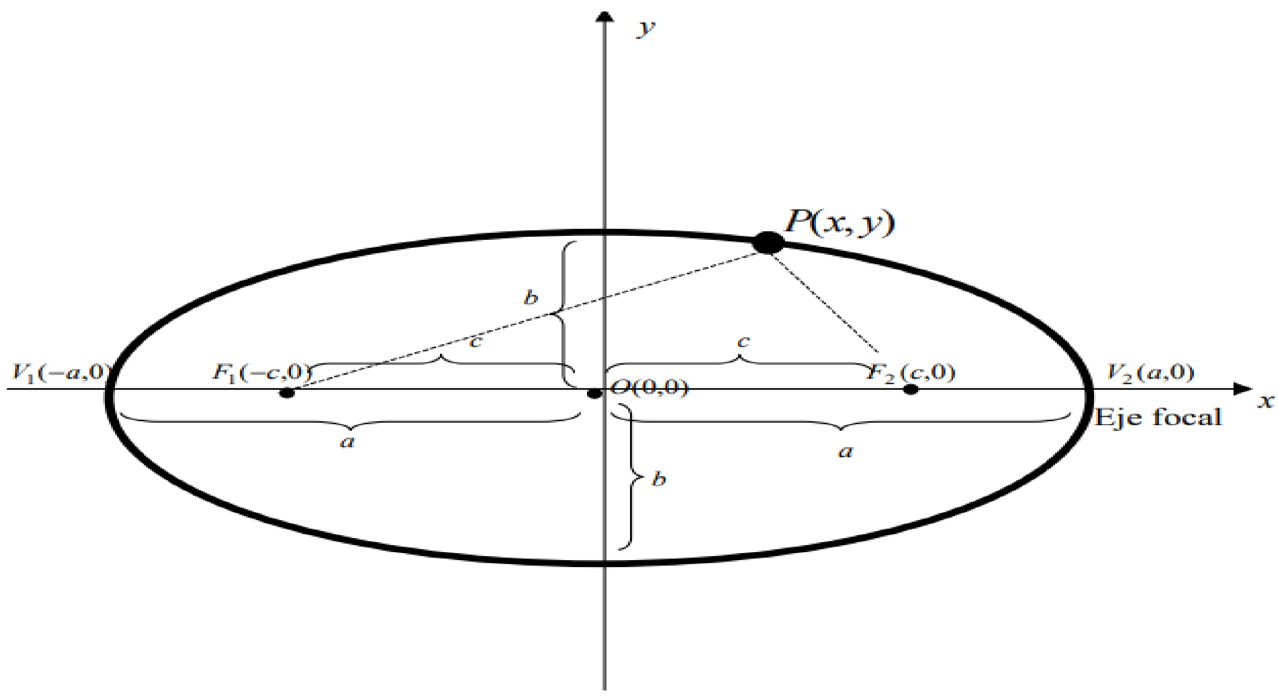
Sean F_1 y F_2 dos puntos del plano y sea a una constante positiva. La Elipse se define como el conjunto de puntos $P(x,y)$ tales que la suma de su distancia a F_1 con su distancia a F_2 es igual a $2a$. Es decir:

Elipse= $\{P(x,y)/\, d(P,F_1)+d(P,F_2)=2a\}$

A F_1 y F_2 se les denomina **focos de la elipse** y "a" representa la medida del **semieje mayor** de la elipse.

3.3.2 Ecuación Canónica

Sean $F_1(-c,0)$ y $F_2(c,0)$, observe el gráfico:



$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$ Ecuación canónica de la elipse con centro $O(0,0)$ y eje focal horizontal

"b" representa la longitud del **semieje menor**, Observe la gráfica anterior.

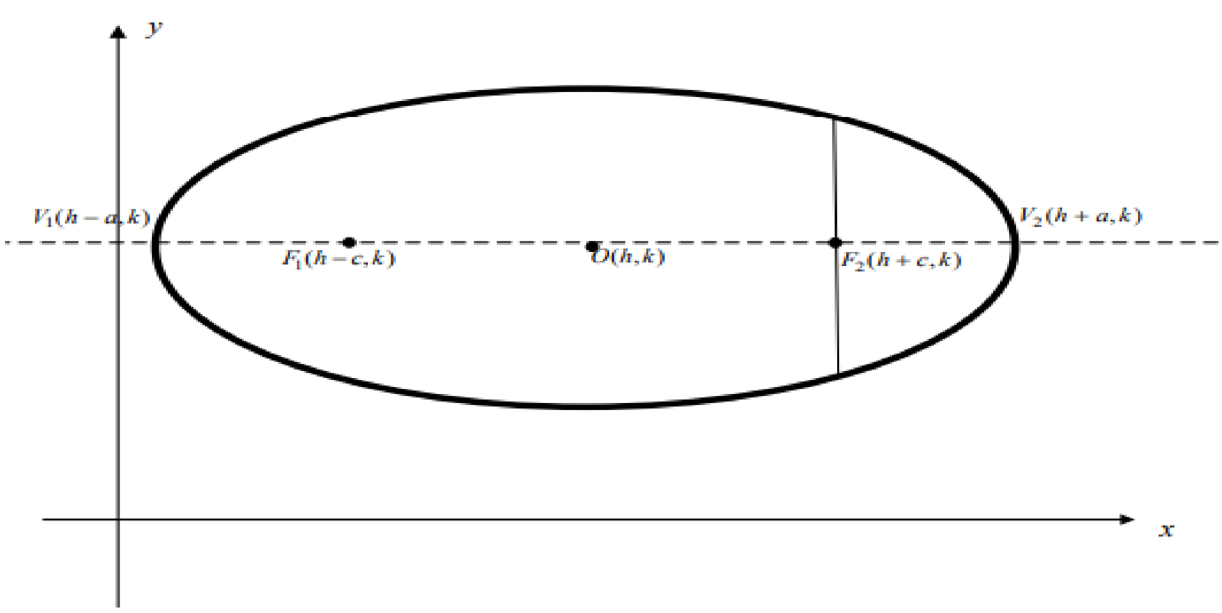
Aquí el **lado recto** tiene dimensión $\boxed{\frac{2b^2}{a}}$. ¡Demuéstrelo!

Para los casos generales tenemos:

Suponga que el vértice es el punto $V(h,k)$, y que el **eje focal sea horizontal** entonces su ecuación sería:

$$\frac{(x-h)^2}{a^2}+\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$$

Y su gráfica sería:

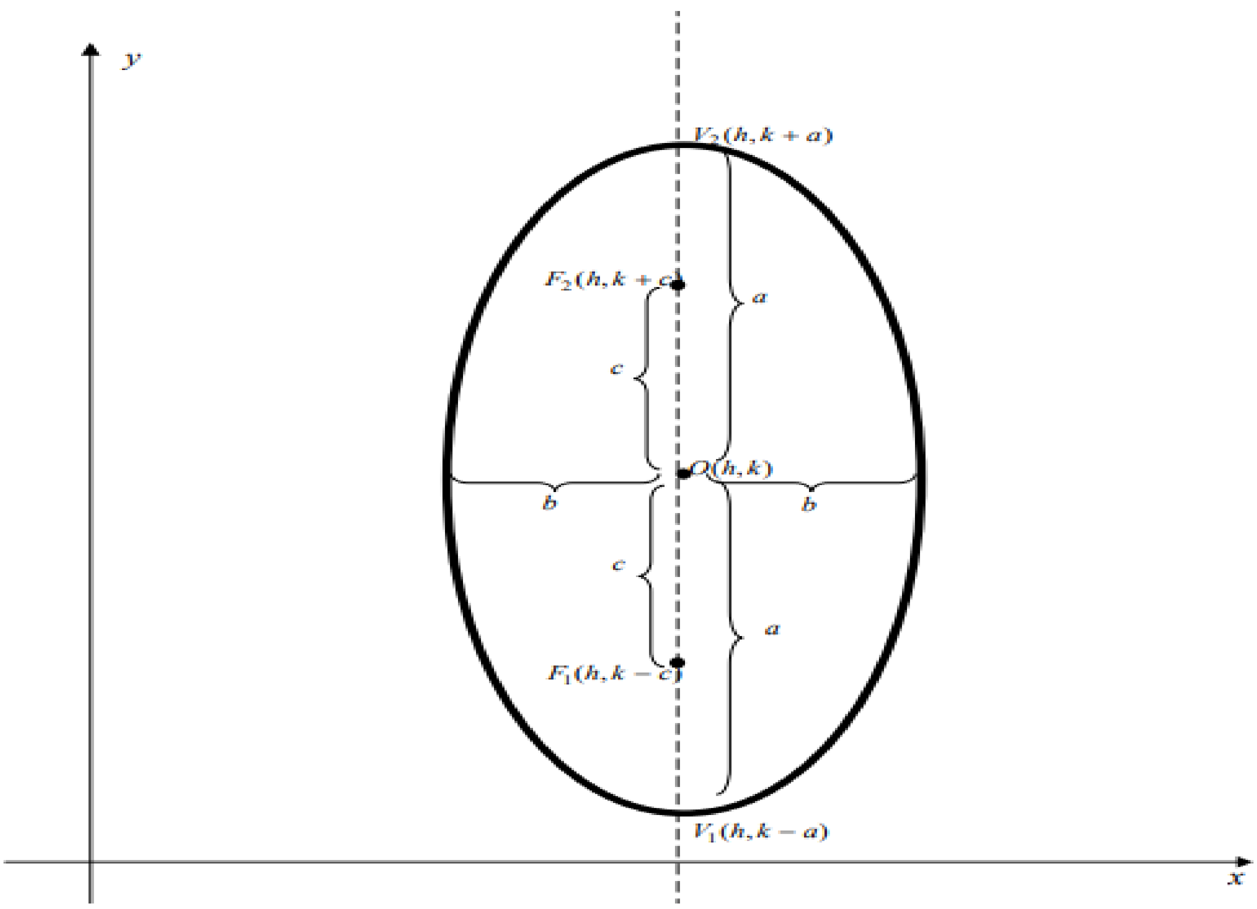


Observación: La dirección del eje focal está indicada por el término que tiene el mayor denominador, es este caso ese sería el valor de "a^2". Observe también que $a > b$.

Por lo tanto, si el **eje focal fuese vertical**, su ecuación sería:

$$\frac{(y-k)^2}{a^2}+\frac{(x-h)^2}{b^2}=1$$

Y su gráfica sería:



Ejemplo 1

Graficar la Elipse que tiene por ecuación $25x^2+16y^2+100x-96y-156=0$. **Indique todos sus elementos.**

Solución

La ecuación general dada, la transformamos a la ecuación canónica completando cuadrados

$$25(x^2+4x+4)+16(y^2-6y+9)=156+100+144$$
$$25(x+2)^2+16(y-3)^2=400$$

Ahora dividimos para 400

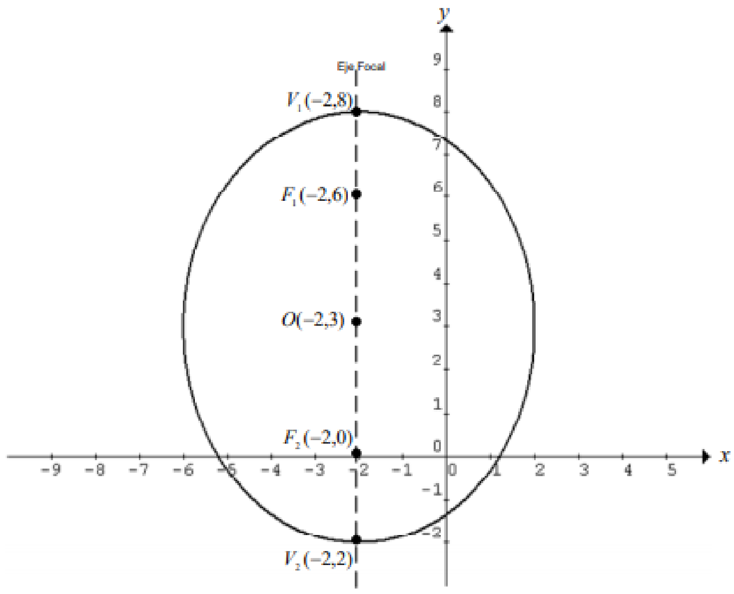
$$\frac{25(x+2)^2}{400}+\frac{16(y-3)^2}{400}=\frac{400}{400}$$
$$\frac{(x+2)^2}{16}+\frac{(y-3)^2}{25}=1$$

La última ecuación nos indica que la elipse tiene:

1. Centro $O(-2,3)$
2. Eje **focal vertical**, debido a que el mayor denominador está sobre el termino que contiene a "y" Entonces $a^2=25 \Rightarrow a=5$
3. $b^2=16 \Rightarrow b=4$
4. Lo anterior nos permite calcular el valor de c.

$$\boxed{\begin{aligned} c&=\sqrt{a^2-b^2}\\ c&=\sqrt{25-16}\\ c&=\sqrt{9}\\ c&=3\end{aligned}}$$

Por lo tanto la gráfica sería:

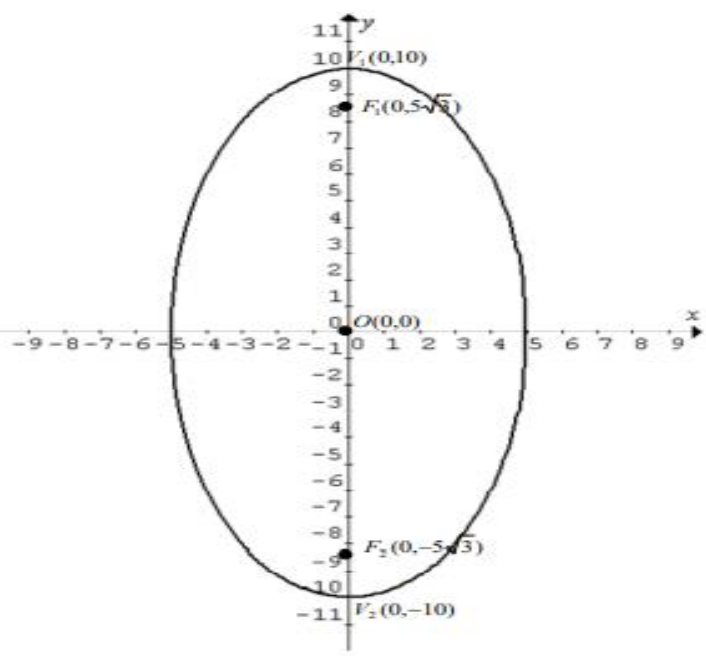


Ejemplo 2

Hallar la ecuación general de la Elipse cuye eje mayor mide 20 unidades y los focos son los puntos de coordenadas $(0,.5\sqrt{3})$ y $(0,-5\sqrt{3})$.

SOLUCIÓN:

Primero representamos en el plano cartesiano los puntos dados.



Observamos que la elipse tiene como eje focal, el eje y, que $c=5\sqrt{3}$.
Como nos dicen que el eje mayor mide 20 unidades, entonces $a=10$
Esto, nos permite calcular b:

$$b^2=a^2-c^2$$
$$b^2=(10)^2-\left(5\sqrt{3}\right)^2$$
$$b^2=100-75$$
$$b^2=25\Rightarrow b=5$$

Finalmente la ecuación de la elipse sería:

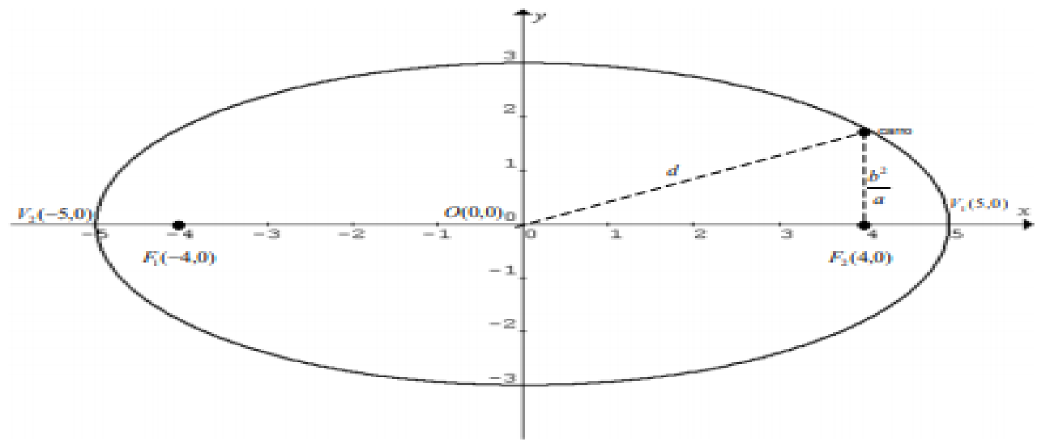
$$\frac{y^2}{100}+\frac{x^2}{25}=1$$
$$4x^2+y^2=100$$

Ejemplo 3

Una pista de carros tiene forma de elipse, el eje mayor mide 10 km. Y el eje menor 6 km. Determine la distancia a que se encuentra un carro del centro de la pista en el momento en que pasa a la altura de uno de los focos.

Solución

Representando en el plano cartesiano la información proporcionada, tenemos:



La ecuación de la elipse sería: $\boxed{\frac{x^2}{5^2}+\frac{y^2}{3^2}=1}$

Como $\boxed{a=5}$ y $\boxed{b=3}$ entonces $\boxed{\begin{array}{l} c^2=a^2-b^2=25-9=16 \\ c=4 \end{array}}$

7. HIPERBOLA

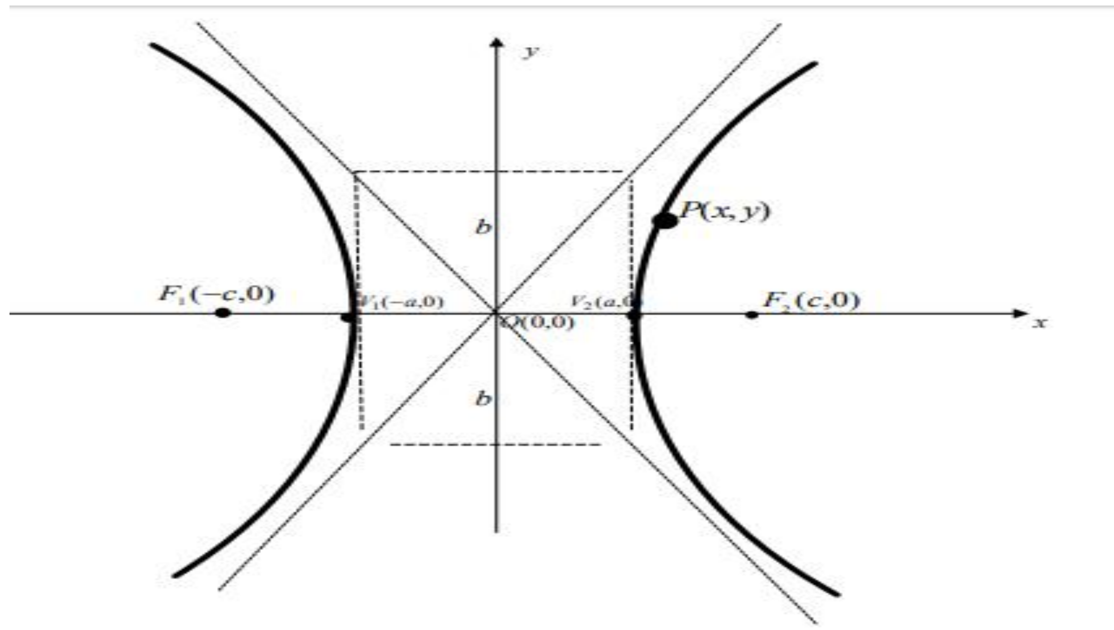
Sean F_1 y F_2 dos puntos del plano y sea a una constante positiva. La Hipérbola se define como el conjunto de puntos $P(x,y)$ del plano tales que el valor absoluto de la diferencia de su distancia a F_1 con su distancia a F_2 es igual a $2a$. Es decir:

Elipse= $\{P(x,y)/|d(P,F_1)-d(P,F_2)|=2a\}$

A F_1 y F_2 se les denomina **focos de la hipérbola.**

3.4.2 Ecuación Canónica

Sean $F_1(-c,0)$ y $F_2(c,0)$, observe el gráfico:



$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$$ Ecuación canónica de la hipérbola con centro $O(0,0)$ y eje focal horizontal

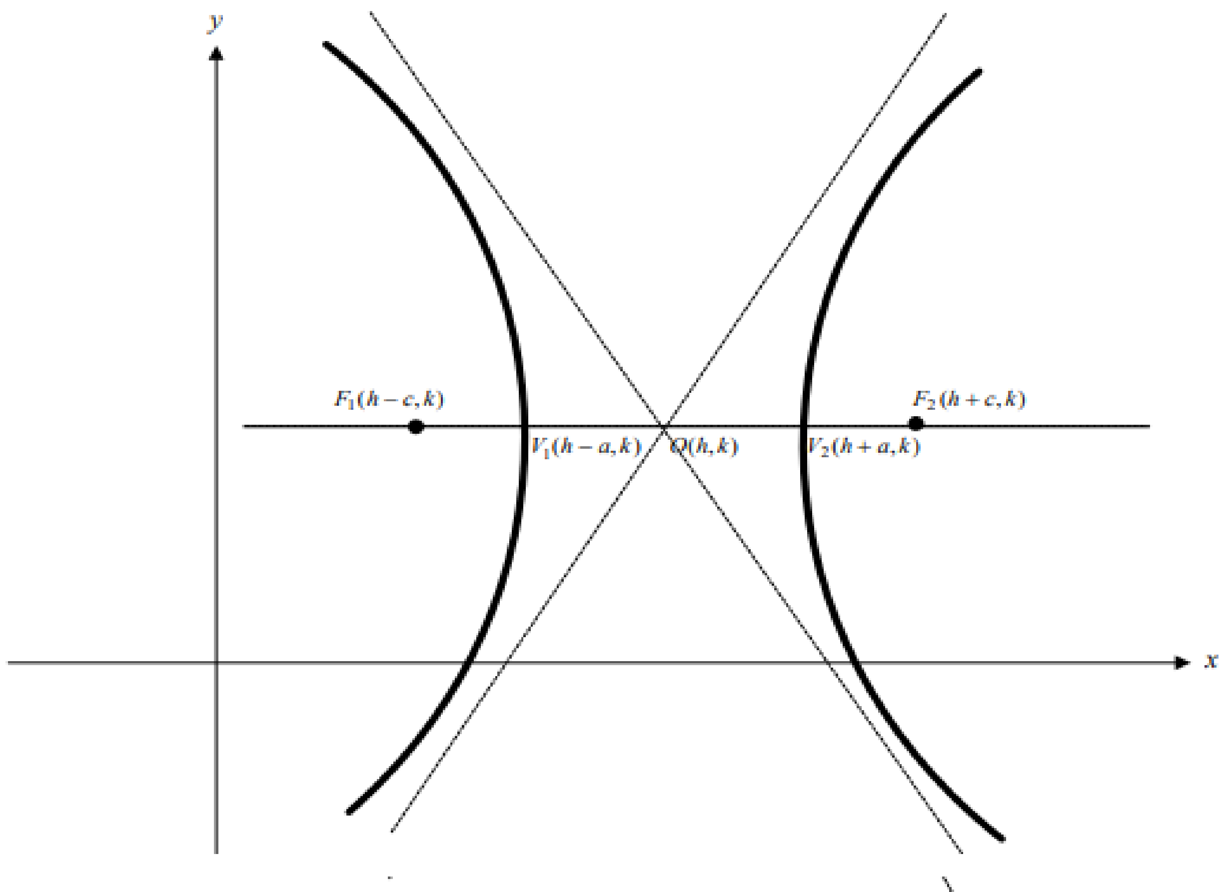
Aquí "b" representa la longitud del segmento (Observe la gráfica anterior) llamado **semieje conjugado**.

Para los casos generales tenemos:

Suponga que el vértice es el punto $V(h,k)$, y que el eje focal sea horizontal entonces su ecuación sería:

$$\frac{(x-h)^2}{a^2}-\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$$

Y su gráfica sería:

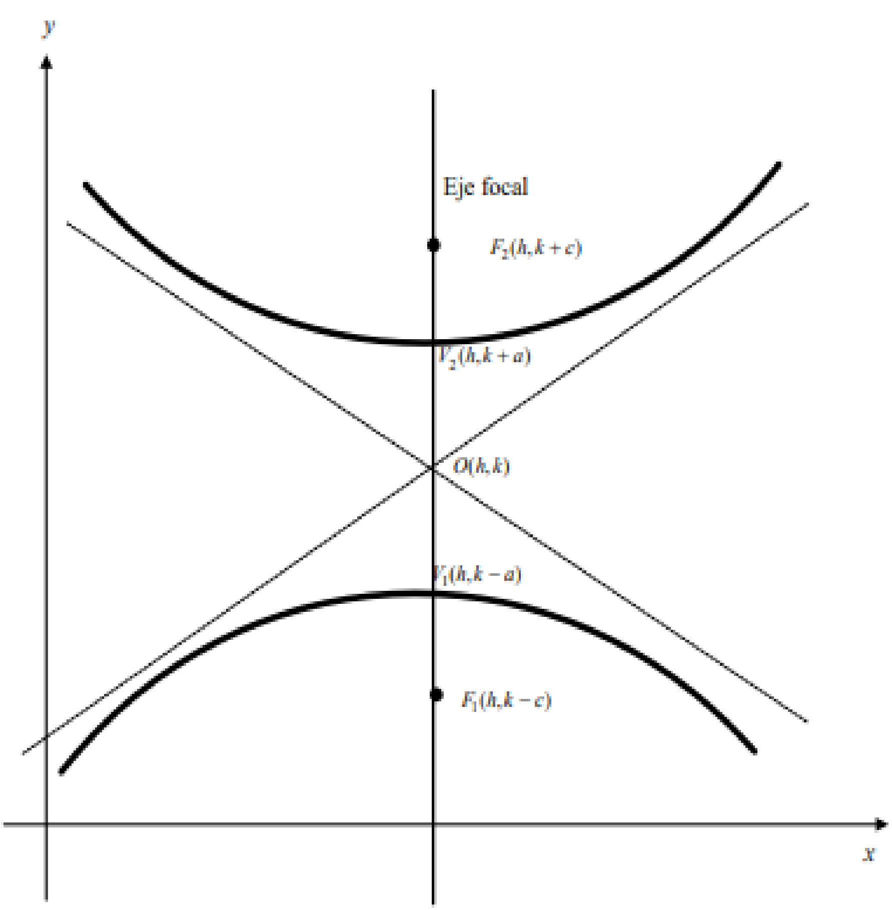


<u>OBSERVACIÓN</u>: La dirección del eje focal esta indicada por el término positivo y además sobre este término estará "a^2".

Por lo tanto, si el eje **focal fuese vertical,** su ecuación sería:

$$\frac{(y-k)^2}{a^2}-\frac{(x-h)^2}{b^2}=1$$

Y su gráfica sería:



Ejemplo 1

Graficar la hipérbola que tiene por ecuación $x^2 - 3y^2 + 2x + 6y - 1 = 0$. Indique coordenadas de los vértices, coordenadas de los focos y ecuaciones de las asíntotas.

<u>**SOLUCIÓN:**</u>

Agrupando y completando cuadrados para darle la forma canónica a la ecuación:

$$\left(x^2 + 2x + 1\right) - 3\left(y^2 - 2y + 1\right) = 1 + 1 - 3$$
$$(x+1)^2 - 3(y-1)^2 = -1$$
$$3(y-1)^2 - (x+1)^2 = 1$$
$$\frac{(y-1)^2}{\frac{1}{3}} - \frac{(x+1)^2}{1} = 1$$

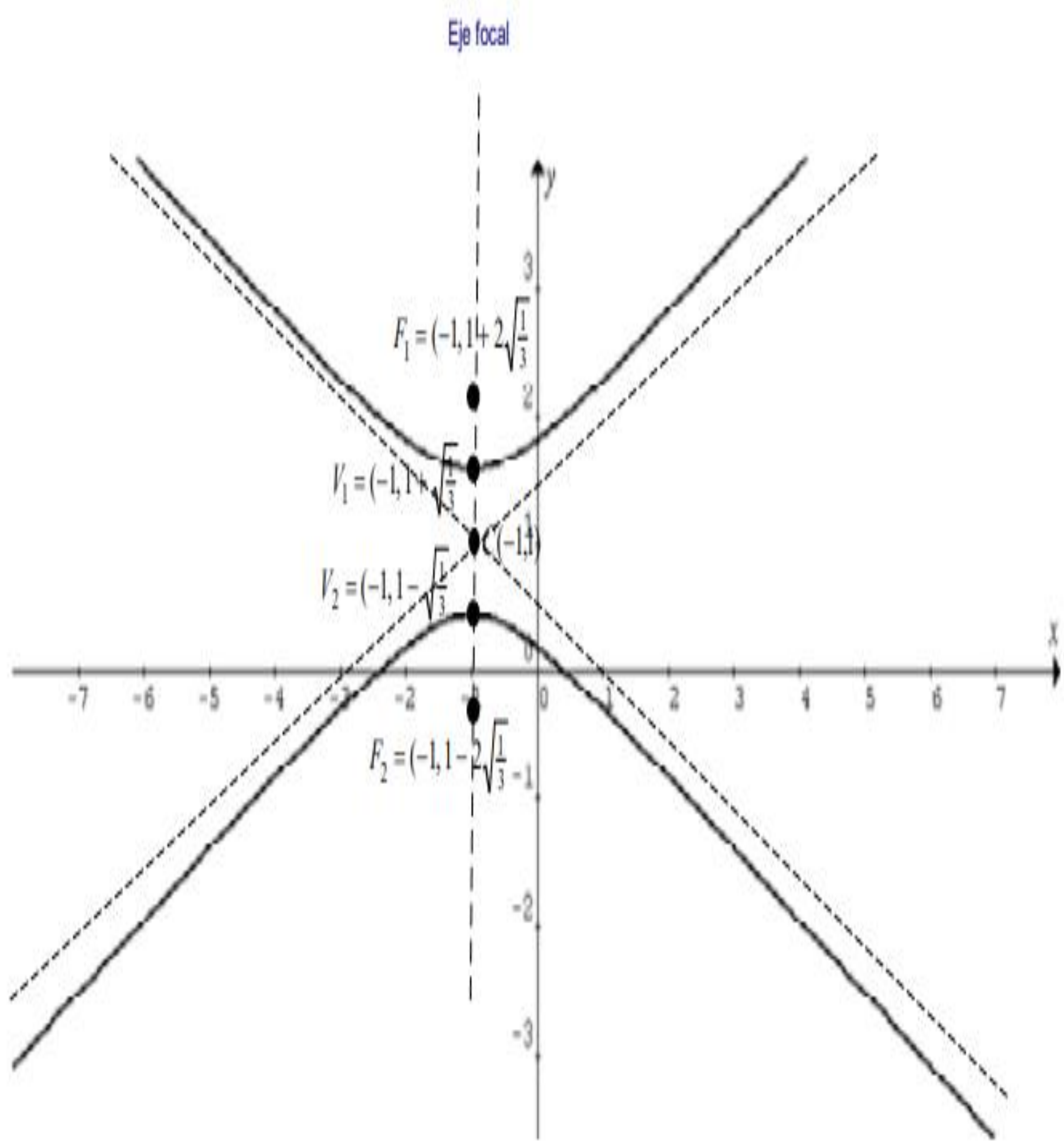
Se concluye que:

1. La hipérbola tiene eje focal vertical, debido a que el termino positivo es el que contiene a "y".
2. $a^2 = \frac{1}{3} \Rightarrow a = \sqrt{\frac{1}{3}}$
3. $b^2 = 1 \Rightarrow b = 1$

El valor de c se lo calcula empleando la fórmula $c = \sqrt{a^2 + b^2}$, es decir:

$$c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{\tfrac{1}{3} + 1} = \sqrt{\tfrac{4}{3}} = 2\sqrt{\tfrac{1}{3}}$$

Por lo tanto su gráfica sería:



Las ecuaciones de las asíntotas se determinan igualando a cero la ecuación canónica:

$$3(y-1)^2-(x+1)^2=0$$

$$3(y-1)^2=(x+1)^2$$

$$\sqrt{3(y-1)^2}=\sqrt{(x+1)^2}$$

$$\sqrt{3}\sqrt{(y-1)^2}=\pm(x+1)$$

$$y-1=\frac{\pm(x+1)}{\sqrt{3}}$$

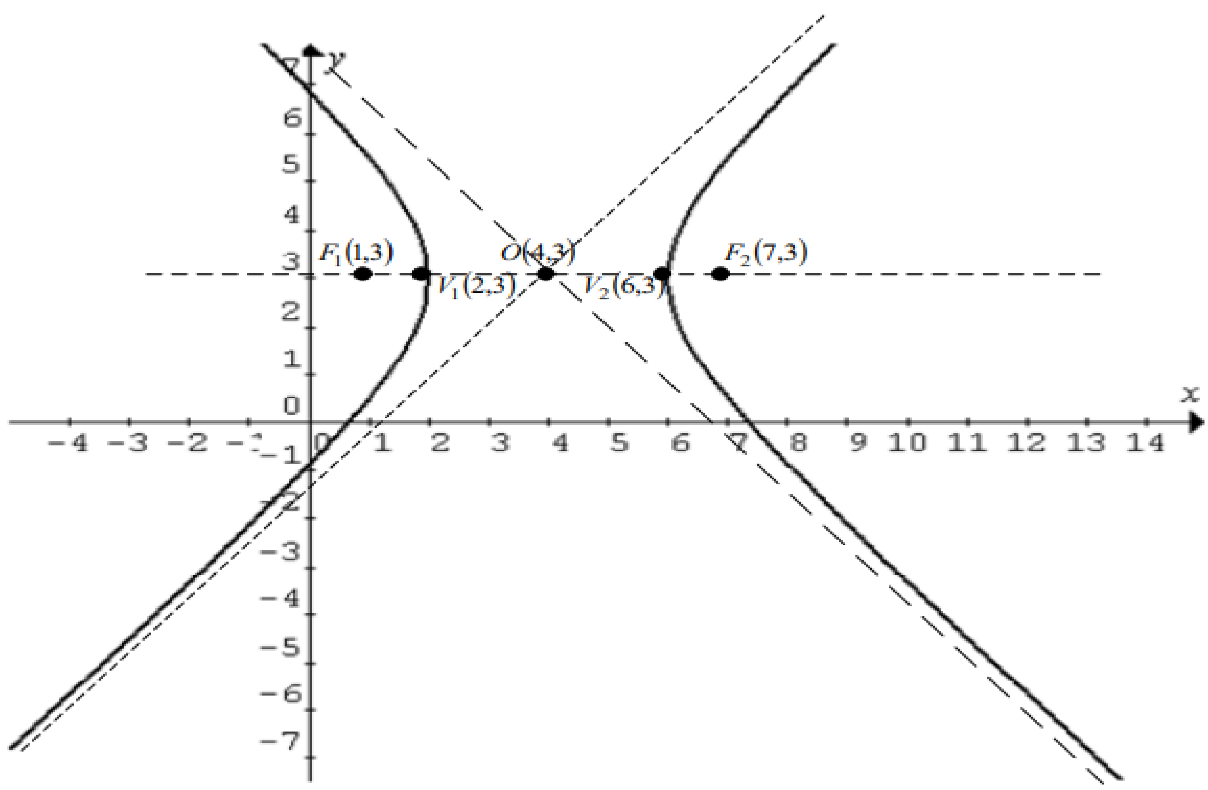
$$y=1\pm\frac{(x+1)}{\sqrt{3}}$$

Ejemplo 2

Hallar la ecuación general de la cónica que tiene por focos los puntos $(1,3)$ y $(7,3)$; y por vértices los puntos $(2,3)$ y $(6,3)$

SOLUCIÓN:

Representando los focos y vértices en el plano cartesiano, sacamos las conclusiones necesarias para plantear la ecuación buscada



Del gráfico se observa que:

Del gráfico se observa que:

1. El eje focal debe ser horizontal.
2. El centro tiene coordenadas $0(4,3)$.
3. $a=2$ y $c=3$

El valor de b se calcula empleando la formula $b=\sqrt{c^2-a^2}$, es decir:

$$b=\sqrt{c^2-a^2}=\sqrt{9-4}=\sqrt{5}$$

Ahora hallando la ecuación de la hipérbola, tenemos:

$$\frac{(x-4)^2}{4}-\frac{(y-3)^2}{5}=1$$

$$5(x^2-8x+16)-4(y^2-6y+9)=20$$

$$5x^2-40x+80-4y^2+24y-36-20=0$$

$$5x^2-4y^2-40x+24y+24=0$$

PARTE 3 ESTADÍSTICA Y PROBABILIDAD

La estadística es una rama de las matemáticas que tiene aplicaciones en cada toda faceta de nuestra vida. Una vez aprendido y entendido el lenguaje de la estadística, veremos que es una poderosa herramienta para el análisis de datos en numerosos campos de aplicación diferentes.

DEFINICIONES BÁSICAS (Triola)

- Datos son el conjunto de información recolectada (como mediciones, géneros, respuestas de encuestas).
- Estadística es la ciencia que se encarga de planear estudios y experimentos, obtener datos y luego organizar, resumir, presentar, analizar e interpretar la información para extraer conclusiones basadas en los datos.
- Población es el conjunto completo de todos los elementos (puntuaciones, personas, mediciones, etcétera) que se someten a estudio. El conjunto es completo porque incluye a todos los sujetos que se estudiarán.
- Censo es el conjunto de datos de cada uno de los miembros de la población.
- Muestra es un subconjunto de miembros seleccionados de una población.

VARIABLES Y DATOS (MENDENHALL)

Una vez que el lector haya recolectado un conjunto de mediciones, ¿cómo puede mostrar este conjunto en una forma clara, entendible y fácil de leer? Primero, debe tener aptitud para definir lo que se entiende por medición o “datos” y clasificar los tipos de datos que probablemente se encuentre en la vida real. Empezamos por introducir algunas definiciones, términos nuevos en el lenguaje de la estadística que es necesario saber.

Definición: Una variable es una característica que cambia o varía con el tiempo y/o para diferentes personas u objetos bajo consideración. Por ejemplo, la temperatura corporal es una variable que cambia con el tiempo en una sola persona; también varía de una persona a otra. La afiliación religiosa, el origen étnico, el ingreso, la estatura, edad y número de hijos son todas ellas variables, es decir, características que varían según la persona seleccionada.

TIPOS DE VARIABLES (Mendenhall)

Algunos conjuntos de datos consisten en números (como estaturas de 160 y 172 centímetros), mientras que otros no son numéricos (como los colores de ojos verde y café). Los términos datos cuantitativos y datos categóricos suelen utilizarse para distinguir entre ambos tipos. (TRIOLA).

Se pueden clasificar variables en una de dos categorías: cualitativas y cuantitativas. Las variables cualitativas miden una cualidad o característica en cada unidad experimental. Las variables cuantitativas miden una cantidad numérica en cada unidad experimental.

Las variables cualitativas producen datos que se pueden clasificar de acuerdo con similitudes o diferencias en clase; por lo tanto, con frecuencia se denominan datos categóricos. Las variables como género, año y especialidad. He aquí algunos otros ejemplos:

• Afiliación política: Liberal, Conservador, independiente

• Clasificación de gusto: excelente, bueno, regular, malo

• Color de un dulce M&M’S® : café, amarillo, rojo, anaranjado, verde, azul

Las variables cuantitativas, con frecuencia representadas por la letra x, producen datos numéricos, por ejemplo:

• número de pasajeros en un vuelo de Bogotá a Cali

• peso de un paquete listo para ser enviado

• volumen de jugo de naranja en un vaso

8. GRÁFICAS PARA DATOS CATEGÓRICOS

Una vez recolectados los datos, éstos pueden consolidarse y resumirse para mostrar la siguiente información:
• ¿Qué valores de la variable han sido medidos?
• ¿Con qué frecuencia se presenta cada uno de los valores?

Para este fin, se puede construir una *tabla estadística* que se puede usar para mostrar los datos gráficamente como una distribución de datos. El tipo de gráfica que se escoja depende del tipo de variable que se haya medido. Cuando la variable de interés es *cualitativa*, la tabla estadística es una lista de las categorías siendo consideradas junto con una medida de la frecuencia con que se presenta cada valor. Se puede medir "la frecuencia" en tres formas diferentes:

• La **frecuencia** o número de mediciones en cada categoría
• La **frecuencia relativa** o proporción de mediciones en cada categoría
• El **porcentaje** de mediciones en cada categoría

Por ejemplo, si con *n* representamos el número total de mediciones en el conjunto, se puede hallar la frecuencia relativa y porcentaje usando estas relaciones:

$$Frecuencia \quad Relativa = \frac{Frecuencia}{n}$$

$$Porcentaje = 100 \times Frecuencia\_Relativa$$

Se encontrará que la suma de las frecuencias es siempre *n*, la suma de las frecuencias relativas es 1 y la suma de los porcentajes es 100%. Las categorías para una variable cualitativa deben escogerse de modo que

• una medición pertenecerá a una categoría y sólo a una
• cada medición tiene una categoría a la que se puede asignar

Una vez que a las mediciones se les hayan dado categorías y se resumieron en una *tabla estadística*, se puede usar ya sea una gráfica de pastel o una gráfica de barras para mostrar la distribución de los datos. Una **gráfica de pastel** es la conocida gráfica circular que muestra la forma en que están distribuidas las medidas entre las categorías. Una **gráfica de barras** muestra la misma distribución de medidas en categorías, con la altura de la barra midiendo la frecuencia con la que se observa una categoría en particular.

Ejemplo: En una encuesta respecto a la educación pública, a 400 Coordinadores de escuelas se les pidió calificaran la calidad de la educación en Estados Unidos, siendo A la mejor nota y D la peor. Sus respuestas están resumidas en la tabla. Construya una gráfica de pastel y una de barras a partir de este conjunto de datos.

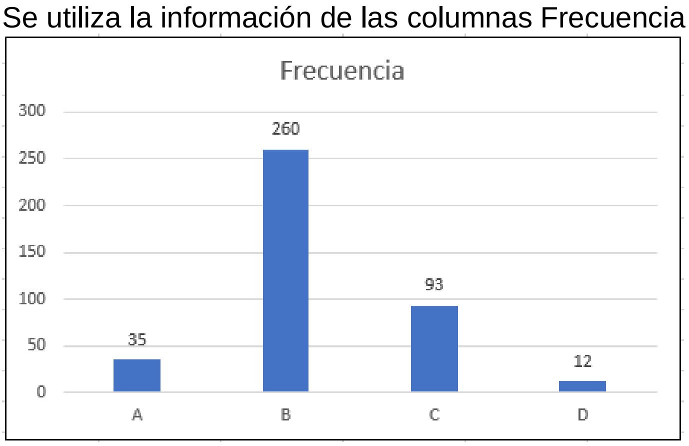
Solución: Para construir una gráfica de pastel, asigne un sector de círculo a cada categoría. El ángulo de cada sector debe ser proporcional a la magnitud de las mediciones (o frecuencia relativa) en esa categoría. Como un círculo contiene 360°, se puede usar esta ecuación para hallar el ángulo:

$$Ángulo = Frecuencia\,relativa \times 360°$$

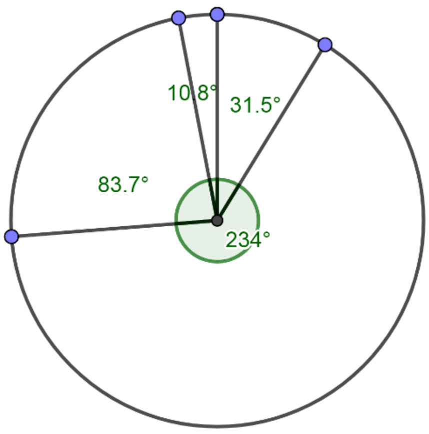
Calificación de la educación en Estados Unidos hecha por 400 educadores:

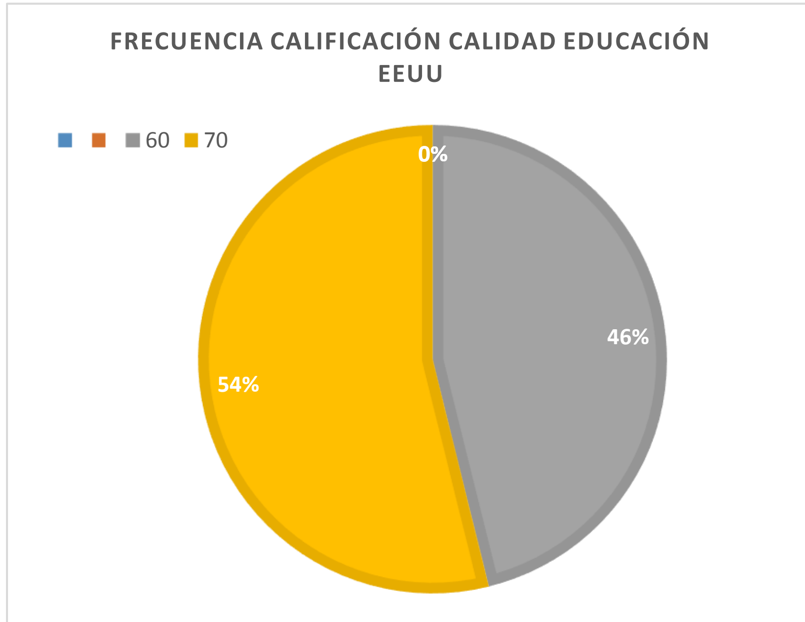
Calificación	Frecuencia	Frecuencia Relativa	Porcentaje	Ángulo (en grados)
A	35	35/400=0.0875	0.0875×100=8.75%	0.0875×360=31.5°
B	260	260/400=0.65	0.65×100=65%	0.65×360=234°
C	93	93/400=0.2325	0.2325×100=23.25%	0.2325×360=83.7°
D	12	12/400=0.03	0.03×100=3%	0.03×360=10.8°
Total	400			

Se utiliza la información de las columnas Frecuencia para construir la gráfica de barras.



Para construir el gráfico circular utilizamos la columna ángulo y porcentajes





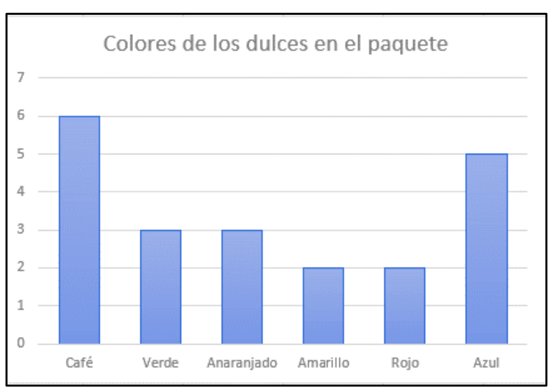
Ejemplo: Una bolsa de tamaño botana de dulces M&M'S contiene 21 dulces con los colores que se indican en la tabla. La variable "color" es cualitativa, se presenta la lista con las seis categorías junto con un total del número de dulces de cada color. Las últimas tres columnas dan las tres diferentes medidas de con qué frecuencia se presenta cada categoría. Como las categorías son colores y no tienen un orden particular, se pueden construir gráficas de barras.

Datos sin elaborar: colores de 21 dulces

Café	Verde	Café	Azul
Rojo	Rojo	Verde	Café
Amarillo	Anaranjado	Verde	Azul
Café	Azul	Azul	Café
Anaranjado	Azul	Café	Anaranjado
Amarillo			

Tabla estadística: datos de M&M'S para el ejemplo

Categoría	Total	Frecuencia	Frecuencia relativa	Porcentaje
Café	~~IIII~~ I	6	6/21	28%
Verde	III	3	3/21	14
Anaranjado	III	3	3/21	14
Amarillo	II	2	2/21	10
Rojo	II	2	2/21	10
Azul	~~IIII~~	5	5/21	24
Total		21	1	100%



9. GRÁFICAS PARA DATOS CUANTITATIVOS

Las variables cuantitativas miden una cantidad en cada unidad experimental. Si la variable puede tomar sólo un número finito o contable de valores, es una variable discreta. Una variable que puede tomar un número infinito de valores correspondientes a puntos en un intervalo de recta se llama continua.

Gráficas de líneas: Cuando una variable cuantitativa se registra en el tiempo a intervalos igualmente espaciados (por ejemplo: diario, semanal, mensual, trimestral o anual), el conjunto de datos forma una serie de tiempo. Los datos de una serie de tiempo se presentan con más efectividad en una gráfica de líneas con el tiempo como eje horizontal. La idea es tratar de distinguir un patrón o tendencia que sea probable de continuar en el futuro y luego usar ese patrón para hacer predicciones precisas para el futuro inmediato.

DISTRIBUCIÓN DE FRECUENCIAS

Cuando trabajamos con grandes conjuntos de datos, a menudo es útil organizarlos y resumirlos elaborando una tabla llamada *distribución de frecuencias*, la cual indica cómo un conjunto de datos se divide en varias categorías (o clases) al listar todas las categorías junto con el número de valores de los datos que hay en cada una.

Procedimiento para construir una distribución de frecuencias

Las distribuciones de frecuencias se construyen por las siguientes razones:
a. Es posible resumir conjuntos grandes de datos;
b. se logra cierta comprensión sobre la naturaleza de los datos; y
c. se tiene una base para construir gráficas (como los *histogramas*, que se estudiarán en la siguiente sección).

Los pasos para su elaboración manual son los siguientes:

1. Determine el número de clases que desea, el cual debe estar entre 5 y 20. El número que elija puede verse afectado por la comodidad de usar cifras enteras.
2. Calcule la anchura de clase.

$$Anchura\ de\ clase \approx \frac{(valor\ más\ alto) - (valor\ más\ bajo)}{número\ de\ clases}$$

Redondee este resultado para obtener un número más adecuado. (Generalmente se redondea *hacia arriba*). Es probable que necesite modificar el número de clases para utilizar valores convenientes.
3. Comience por elegir un número para el límite inferior de la primera clase. Elija el valor del dato más bajo o un valor conveniente que sea un poco más pequeño.
4. Usando el límite inferior de la primera clase y la anchura de clase, proceda a listar los demás límites inferiores de clase. (Sume la anchura de clase al límite inferior de la primera clase para obtener el segundo límite inferior de clase. Después sume la anchura de clase al segundo límite inferior de clase para obtener el tercero, y
así sucesivamente).
5. Anote los límites inferiores de clase en una columna vertical y luego proceda a anotar los límites superiores de clase.
6. Tome el valor de cada dato y ponga una marca en la clase adecuada. Agregue las marcas para obtener la frecuencia total de cada clase.
7. Ubique cada valor de la tabla inicial en la clase correspondiente, así se puede encontrar la frecuencia de cada clase.

Cuando construya una distribución de frecuencias, asegúrese de que las clases no se traslapen, de modo que cada uno de los valores originales pertenezca exactamente a una de las clases. Incluya todas las clases, aun las que tengan una frecuencia de cero. Trate de utilizar la misma anchura para todas las clases, aunque a veces es imposible evitar intervalos con finales abiertos, como “65 años o mayores”.

Ejemplo: Considere las medidas del pulso (en latidos por minuto) obtenidas de una muestra aleatoria simple de 40 hombres y de otra muestra aleatoria simple de 40 mujeres, con los resultados que se presentan en la (del conjunto de datos 1 del apéndice B). El pulso es sumamente importante, los médicos utilizan el pulso para evaluar la salud de los pacientes. Cuando el pulso tiene una frecuencia demasiado elevada o demasiado baja, esto podría indicar que existe algún problema médico; por ejemplo, un pulso muy alto podría indicar que el paciente tiene una infección o que está deshidratado.

Mujeres																			
76	72	88	60	72	68	80	64	68	68	80	76	68	72	96	72	68	72	64	80
64	80	76	76	76	80	104	88	60	76	72	72	88	80	60	72	88	88	124	64
Hombres																			
68	64	88	72	64	72	60	88	76	60	96	72	56	64	60	64	84	76	84	88
72	56	68	64	60	68	60	60	56	84	72	84	88	56	64	56	56	60	64	72

Pulsos de mujeres Utilice los pulsos de las mujeres de la tabla y siga el procedimiento anterior para construir la distribución de frecuencias. Incluya 7 clases.

SOLUCIÓN:

Paso 1: Seleccione 7 clases.

Paso 2: Calcule la anchura de clase. Observe que 9.1428571 se redondea a 10, ya que es un número más conveniente.

$$Anchura\ de\ clase \approx \frac{(valor\ más\ alto) - (valor\ más\ bajo)}{número\ de\ clases}$$

$$Anchura\ de\ clase \approx \frac{(124) - (60)}{7} = \frac{64}{7} = 9.1428571\ \approx \mathbf{10}$$

Paso 3: Elija 60 como primer límite inferior de clase, ya que es el valor más bajo de la lista y un número conveniente.
Paso 4: Sume la anchura de clase **10** a 60 para determinar el segundo límite inferior de clase de 70. Continúe y sume la anchura de clase 10 para obtener los límites inferiores de clase restantes de 80, 90, 100, 110 y 120.
Paso 5: Liste los límites inferiores de clase de forma vertical, Con esta lista podemos organizar los límites superiores siempre sumando de a **10.** Hasta completar las 7 clases que se solicitaron al inicio.

Clases	Límite Inferior	Límite superior	Intervalo
1	60	70	(60 , 70)
2	70	80	(70 , 80)
3	80	90	(80 , 90)
4	90	100	(90 , 100)
5	100	110	(100 , 110)
6	110	120	(110 , 120)
7	120	130	(120 , 130)

Paso 6: Anote una marca de clase, esto se halla ubicado la mitad de cada intervalo.

Clases	Intervalo	Marca de clase Xi
1	(60 , 70)	65
2	(70 , 80)	75
3	(80 , 90)	85
4	(90 , 100)	95
5	(100 , 110)	105
6	(110 , 120)	115
7	(120 , 130)	125

Paso 7. Ahora ubicamos cada uno de los valores de la tabla de interés, en este caso latidos por minuto para un conjunto de n=40 mujeres, se recuerdan a continuación:

Mujeres																			
76	72	88	60	72	68	80	64	68	68	80	76	68	72	96	72	68	72	64	80
64	80	76	76	76	80	104	88	60	76	72	72	88	80	60	72	88	88	124	64

El primero de los valores es 76, en la distribución de frecuencias se ubica en la segunda clase porque 76 es un número que está entre 70 y 80,

El segundo valor es 72, también pertenece a la segunda clase, está entre 70 y 80.

El tercer valor es 88, este número pertenece a la tercera clase, 88 esta entre 80 y 90.

Otro ejemplo a citar es 80, cuando lo ubicamos en la lista se ubicará en la tercera clase y no en la segunda, siempre se deja en la que comienza con el valor señalado.

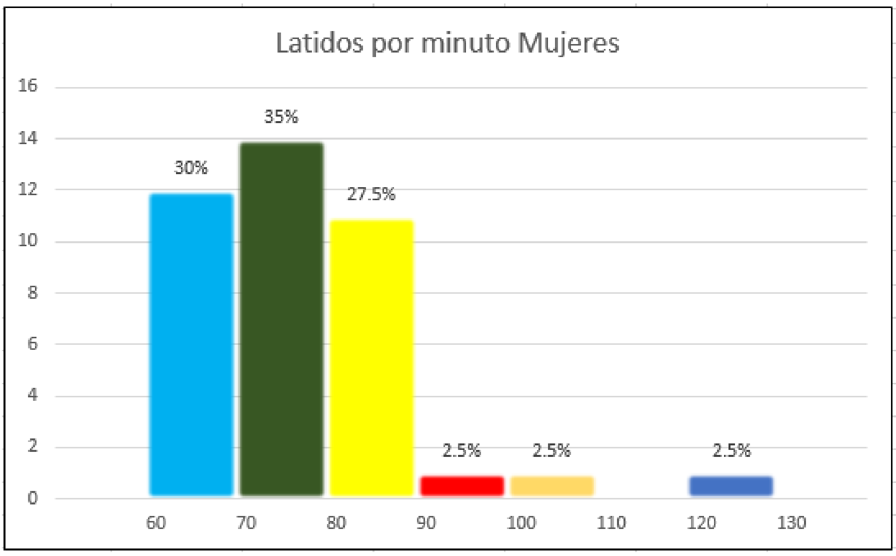
De esta forma se procede con todos los números de la lista, al final contamos cuántos estuvieron en cada intervalo o clase.

<table>
<tr><th>Clases</th><th>Intervalo</th><th>Marca de clase Xi</th><th>Elementos en cada clase</th><th>Frecuencia Absoluta fi</th></tr>
<tr><td>1</td><td>[60 , 70)</td><td>65</td><td>||||||||||||</td><td>12</td></tr>
<tr><td>2</td><td>[70 , 80)</td><td>75</td><td>||||||||||||||</td><td>14</td></tr>
<tr><td>3</td><td>[80 , 90)</td><td>85</td><td>|||||||||||</td><td>11</td></tr>
<tr><td>4</td><td>[90 , 100)</td><td>95</td><td>|</td><td>1</td></tr>
<tr><td>5</td><td>[100 , 110)</td><td>105</td><td>|</td><td>1</td></tr>
<tr><td>6</td><td>[110 , 120)</td><td>115</td><td></td><td>0</td></tr>
<tr><td>7</td><td>[120 , 130)</td><td>125</td><td>|</td><td>1</td></tr>
</table>

A la tabla anterior (que denominamos distribución de frecuencias) se le incluye la frecuencia relativa la cual se obtiene dividiendo cada frecuencia por 40, ya que en el ejercicio se tiene 40 datos,

Clases	Intervalo	Marca de clase **Xi**	Frecuencia Absoluta **fi**	Frecuencia Relativa **hi**	Porcentajes
1	[60 , 70)	65	12	12/40 = 0.3	0.3 × 100 = 30%
2	[70 , 80)	75	14	14/40 =0.35	0.35 × 100 = 35%
3	[80 , 90)	85	11	11/40 =0.275	0.275 × 100 = 27.5%
4	[90 , 100)	95	1	1/40 =0.025	0.025 × 100 = 2.5%
5	[100 , 110)	105	1	1/40 =0.025	0.025 × 100 = 2.5%
6	[110 , 120)	115	0	0/40 =0	0 × 100 = 0%
7	[120 , 130)	125	1	1/40 =0.025	0.025 × 100 = 2.5%

Para trazar el gráfico se tienen en cuenta los intervalos y las frecuencias absolutas



De la gráfica podemos extraer las siguientes conclusiones:

a. El 30% de las mujeres del estudio tienen entre 60 y 70 latidos por minuto
b. El 35% de las mujeres del estudio tienen entre 70 y 80 latidos por minuto
c. El 37.5% de las mujeres de la muestra tienen entre 80 y 90 latidos por minuto
d. Solamente el 2.5% de las mujeres de la muestra tienen entre 90 y 100 latidos por minuto.

También se pueden obtener conclusiones sumando porcentajes, por ejemplo, si sumamos los porcentajes de las dos primeras columnas, podemos indicar que:

e. 65% de las mujeres en la muestra tiene menos de 80 latidos por minuto.
f. El resto tienen más de 80 latidos por minuto, es decir 35% de las mujeres tiene más de 80 latidos por minuto,

PARTE 4 EJERCICIOS A ENTREGAR

1. Realizar un mapa conceptual con las ideas más importantes de las Partes 1, 2 y 3. Es decir en total 3 mapas conceptuales. Uno por cada parte.

2. Del texto Matemáticas 10 MINEDUCACION resuelva en hojas de examen en forma clara y ordenada los siguientes ejercicios: Pág 162: numeral 1D; numeral 3. Pág163: numeral 7A; numeral 11B; numeral 12A; numeral 13F; numeral 14B. Pág 166: numeral 1A; numeral 3C. Pág 167: numeral 5C; numeral 6A; numeral 7B y numeral 9. Pág 170: numeral 1B; numeral 2A; numeral 3E. Pág 175: numeral 1D. Pág177: numeral 1C; numeral 3A. Pág 180: numeral 1E. Pág 183: numeral 1C. Pág 186: numeral 2C; numeral 4A. Pág 190: numeral 2D. Pág 193: numeral 1A. Pág 196: numeral 1B; numeral 3D. Pág 199: numeral 2A;. Pág 201: numeral 1D;. Pág 203: numeral 2B. Pág205: numeral 2D. Pág215: numeral 1. Pág217: numeral 1.